



درسنامه ریاضی گسسته

مدرس : استاد سرکار خانم پریا اردستانی



pariya.ardestani@gmail.com

فهرست

گراف

شمارش

منطق

رابطه ها

روابط بازگشتی

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم



فصل اول : گراف

واژه گراف در ریاضیات حداقل دارای دو معنی می باشد.

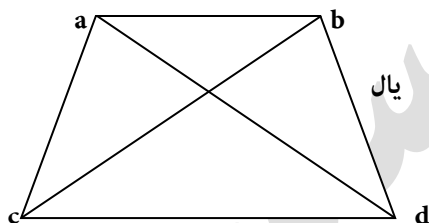
در ریاضیات ابتدایی گراف به نمودار تابع اشاره دارد و در اصطلاح ریاضی دانان گراف ، مجموعه ای از نقاط و خطوط متصل به هم هستند.

در واقع گراف مدلی ریاضی برای یک مجموعه گسسته است که اعضای آن به طریقی به هم مرتبط هستند. اعضای این مجموعه می توانند انسان باشند و ارتباط آن ها با هم دست دادن باشد. اعضا می توانند اتم ها در یک مولکول باشند و ارتباط آن ها اتصال های شیمیایی باشد یا اعضا می توانند قسمت های مختلف زمین و ارتباط بین آن ها پلهایی باشد که آن ها را به هم مرتبط می کند.

نظریه گراف یکی از موضوع های مهم در ریاضیات گسسته است که به مطالعه گراف ها و مدل بندی مسائل به وسیله آن ها می پردازد. لئونارد اویلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسئله پل های کونیگسبرگ نظریه گراف ها را بنیان گذاشت. اما جیمز جوزف سیلوستر نخستین کسی بود که در سال ۱۸۷۸ از واژه گراف برای نامیدن این مدل های ریاضی استفاده کرد.

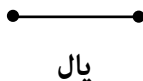
تعریف گراف :

* گراف مجموعه ای از رأس ها یا گره ها (a,b,c,d) و همینطور یال هاست.



یال :

* پاره خط بین دو رأس یا گره را ، یال گویند.



مرتبه گراف :

* به تعداد رأس های یک گراف (نقاط یا گره ها) مرتبه آن گراف گفته میشود و آن را با p نمایش میدهند.



اندازه گراف :

* به تعداد یال های یک گراف ، اندازه آن گراف گفته میشود و آن را با q نمایش میدهند.

$$q = \frac{p(p-1)}{2}$$

اندازه ی گراف یا تعداد کل یالها

درجه راس:

* به تعداد یال های متصل به هر راس ، درجه آن راس گفته می شود. به عبارت دیگر ، درجه یک راس تعداد همسایگی (مجاورت) های مستقیم یک راس را بیان میکند.

$p - 1$: تعداد یالهای هر راس یا درجه ی هر راس

راس ایزوله:

* به راسی که هیچ یالی نداشته باشد، راس ایزوله گفته میشود.

t •

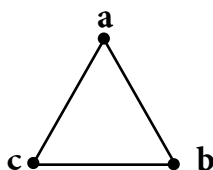
راس ایزوله

رئوس مجاور:

* به هر دو راس که بین آنها یال وجود داشته باشد ، رئوس مجاور گفته میشود.

گراف کامل:

* به گرافی که بین هر دو راس آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد ، گراف کامل میگویند.



گراف تهی :

* گرافی که هیچ یالی نداشته باشد را گراف تهی می نامند.



گراف منظم (منتظم-r):

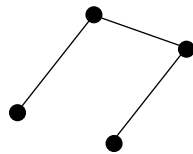
* به گرافی که تمام رئوس آن درجه یکسانی دارند یا به عبارت دیگر تعداد یال مساوی از تمامی رئوس میگذرد، گراف منظم گویند.

$$q = \frac{rp}{2}$$

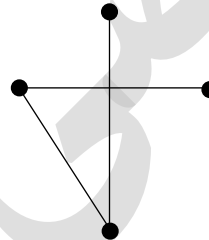
تعداد یال های موجود در گراف منظم

گراف مکمل:

* یک گراف را زمانی مکمل گراف دیگر می گویند که هر یال که در گراف اولی موجود باشد، در دومی موجود نباشد. به عبارت دیگر گرافی که گراف دیگر را تکمیل میکند.



گراف : G



گراف مکمل : G'

گراف همبند:

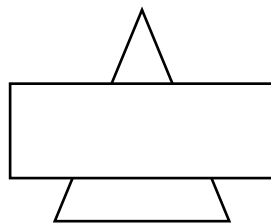
* به گرافی که بین هر دو راس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف همبند گویند.

گرافی را که همبند نباشد، گراف ناهمبند یا چند بخشی گویند.



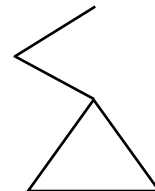
ناهمبند

شکل (۳)



ناهمبند، دوبخشی

شکل (۲)



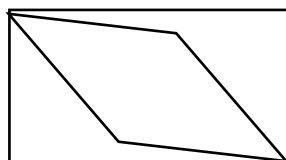
همبند

شکل (۱)



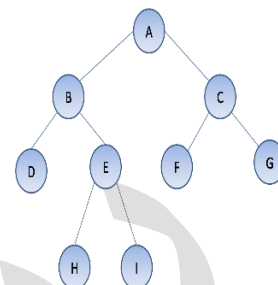
درخت:

* به گراف همبندی که فاقد دور باشد، درخت گوئیم. (یعنی برگشت نداریم)



درخت نیست.

شکل (۲)



شکل (۱)

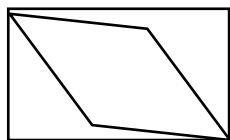
گراف اویلری:

* به مسیری گفته می‌شود که از یک رأس شروع شود و از تمامی یال‌ها یکبار (و فقط یکبار) بگذرد و به همان رأس بازگردد. اگر مسیر از تمام یال‌ها عبور کند ولی به جای اولش باز نگردد به آن گراف (مسیر) اویلری می‌گویند. دور اویلری زمانی وجود دارد که گراف همبند باشد و درجه هر رأس زوج باشد، یعنی تعداد یال‌های متصل به آن عددی زوج باشد.

روش تشخیص: گراف همبندی که درجه ی تمام رئوس آن زوج باشد، اویلری گویند.

* گراف اویلری دارای مدار اویلری میباشد، یعنی دوریست که از یک رأس شروع کرده و با گذشت از همه ی یال‌ها فقط برای یکبار به رأس اولیه برسیم.

مثال: درجه ی همه ی رئوس زوج است، پس گراف اویلری است.



* ممکن است از یک رأس بیش از یکبار عبور کنیم ولی از یک یال نمیتوان بیش از یک بار عبور کرد.

گراف نیمه اویلری:

* در این گراف اگر از یک رأس فرد شروع به حرکت کرده و از هر یال فقط یکبار بگذریم به رأس فرد دیگر میرسیم و به آن گراف نیمه اویلری گویند.

روش تشخیص: گراف ساده G که همبند بوده و فقط دارای ۲ رأس از درجه ی فرد باشد و بقیه رأس‌ها زوج باشند، گراف نیمه اویلری گویند.

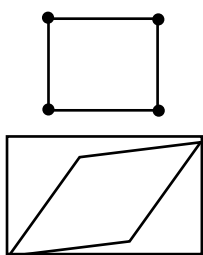


گراف همیلتنی :

* گرافی است که دارای دور باشد ، از تمام رئوس آن عبور کند و بعبارت دیگر دوری از مرتبه ی p باشد.

تفاوت گراف همیلتنی با گراف اویلری :

* در گراف اویلری از هر راس میتوان چندبار عبور کرد، اما در گراف همیلتنی از هر راس میتوان فقط یکبار عبور کرد.



گراف همیلتنی است زیرا از هر راس یکبار عبور میکنیم.

گراف همیلتنی نمیباشد زیرا از هر راس یکبار نمیگذریم.

نکات :

* مجموعه درجه رئوس یک گراف ساده برابر است با دو برابر تعداد یال های آن گراف :

$$\sum_{i=1}^n \text{deg}V_i = 2q \rightarrow \frac{p(p-1)}{2}$$

* اگر گراف کامل باشد ، تعداد کل یال ها از فرمول زیر بدست می آید :

$$q = \frac{p(p-1)}{2}$$

* اگر گراف کامل نباشد ، تعداد کل یال ها از فرمول زیر بدست می آید :

گراف

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

مکمل

* اگر گراف کامل باشد تعداد درجه ی رئوس از فرمول زیر بدست می آید:

$$p - 1$$



* اگر گراف کامل نباشد، تعداد کل یال های هر راس یا به عبارتی درجه ی هر راس از فرمول زیر بدست می آید:

$$deg(a_G) + deg(a'_G) = p - 1$$

* تعداد راه های انتخاب k شئی از میان n شئی مختلف برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

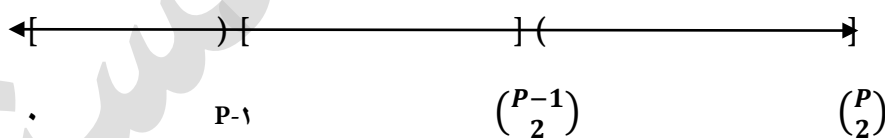
* اگر $k=2$ باشد میتوان گفت :

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

* برای آنکه گراف کامل K_P اوپلری باشد، درجه رئوسش باید برابر $P-1$ ، زوج باشد.

درجه رئوس : $P-1 =$ زوج

بررسی همبند و ناهمبند بودن گراف بدون شکل:



* بازه ی بسته ی صفر تا $P-1$ باز : **حتما ناهمبند**

* بازه ی بسته ی $P-1$ تا $\binom{P-1}{2}$ بسته : **همبند و ناهمبند**

* بازه ی باز $\binom{P-1}{2}$ تا $\binom{P}{2}$ بسته : **حتما همبند**



درجه رئوس MAX و MIN در گراف ساده :

* درجه رئوسی که از بقیه رئوس بزرگتر یا مساوی است MAX نامیده میشود. عبارتی بزرگترین راس گراف را گویند و رئوسی که از سایر راس ها کوچکتر یا مساوی است MIN نامیده میشود. عبارتی کوچکترین راس گراف را گویند.

$$\text{MIN} = \delta \quad \text{MAX} = \Delta$$

$$\delta \geq 0 \quad \Delta \leq P - 1$$

نکات :

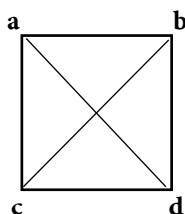
* در گراف r-منتظم MAX و MIN درجه رئوس باهم برابر است.

$$\Delta = \delta = r$$

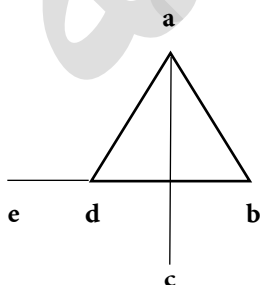
* در گراف ساده G از مرتبه P و اندازه q فرمول زیر را داریم:

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

نمایش گراف بصورت ماتریس :



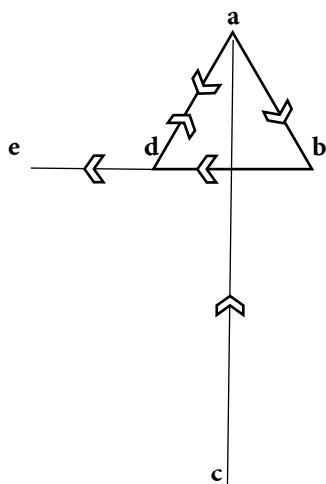
	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	1
c	1	1	0	1
d	1	1	1	0



	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	0
b	1	0	0	1	0
c	1	0	0	0	0
d	1	1	0	0	1
e	0	0	0	1	0



نمایش گراف جهت دار بصورت ماتریس :



	a	b	c	d	e
a	0	1	0	1	0
b	0	0	0	1	0
c	1	0	0	0	0
d	1	0	0	0	1
e	0	0	0	0	0

پاریا اردستانی گسسته



تمرین های فصل گراف

گراف کامل G دارای ۵۵ یال میباشد .
از هر راس آن چند یال میگذرد؟

الف : ۱۰

ب : ۱۱

ج : ۱۳

د : ۱۵

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow 55 = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow 110 = p(p-1)$$

$$\rightarrow 11(10) = 110 \rightarrow P = 11 \rightarrow P - 1 = 11 - 1 = 10$$

چند گراف ساده از مرتبه ۶ می توان ساخت؟

الف : ۲^۶

ب : ۲^{۱۵}

ج : $\binom{6}{1}$

د : ۲^{۳۰}

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow q = \frac{6(6-1)}{2} = \frac{6(5)}{2} = \frac{30}{2} = 15 = q \Rightarrow \text{تعداد کل یالها}$$

هر راس مجاور دو حالت می تواند داشته باشد ، یا یال داشته باشد یا نداشته باشد پس خواهیم داشت :

$$2 \times 2 \times 2 \times \dots = 2^{10}$$

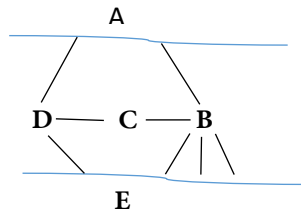
با ۵ راس متمایز a,b,c,d,e چند گراف ساده میتوان ساخت به شرطی که هریک از آنها شامل فقط ۳ یال باشد؟

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow q = \frac{5(4)}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

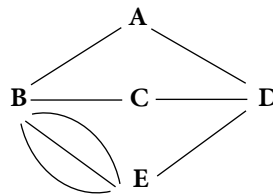
$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{720}{6} = 120$$



فرض کنید طبق شکل شهری از یک رودخانه و پنج منطقه A,B,C,D,E تشکیل شده این ۵ منطقه با پل بهم وصل شده:



الف) گراف چند گانه ی مربوط به این شهر را رسم کنید.



درجه راس A : ۲

درجه راس B : ۵

درجه راس C : ۲

درجه راس D : ۳

درجه راس E : ۴

ب) آیا با آغاز از یکی از مناطق پنجگانه و عبور از پل ها میتوان از هر پل دقیقا یکبار گذشت و به منطقه ی آغاز بازگشت؟
جواب: خیر زیرا گراف اویلری نیست، زیرا درجه ی تمام رئوس زوج نمیباشد.

ج) آیا با آغاز از یکی از مناطق میتوان از هر پل دقیقا یکبار گذشت؟ (در این حالت لازم نیست منطقه ی آغاز و پایان یکی باشد)
جواب: باتوجه به گراف رسم شده چون دو راس درجه فرد داریم گراف نیمه اویلری است.

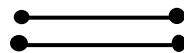
گرافی از مرتبه ی ۵ داریم ، بررسی کنید این گراف همبند، ناهمبند، یا همبند - ناهمبند است؟

$$P = 0 \quad \binom{4}{2} = \frac{24}{4} = 6$$

$$[0 \quad 4] [4 \quad 6] [6 \quad 10]$$

$$P-1 = 4 \quad \binom{5}{2} = \frac{120}{12} = 10$$

* حال برای بررسی حالت های مختلف اعدادی را بین سه بازه ی نوشته شده انتخاب میکنیم و با کشیدن شکل گراف بررسی میکنیم که گراف همبند ، ناهمبند ، یا همبند ناهمبند است.
مثلا بین بازه ی (۴ ۰] عدد ۲ را انتخاب میکنیم و گراف زیر را داریم:



که باتوجه به شکل گراف ما ، گراف حتما ناهمبند است.



در گرافی از مرتبه ۱۱ و $\text{Min} = 3$ و $\text{Max} = 7$ مجموع حداکثر و حداقل این گراف چند می‌باشد؟

$$\frac{2q}{11} \leq 7 \rightarrow 2q \leq 77 \rightarrow q \leq \frac{77}{2} \rightarrow q = 38$$

$$3 \leq \frac{2q}{11} \rightarrow 2q \geq 33 \rightarrow q \geq \frac{33}{2} \rightarrow q = 17$$

$$q = q_{\max} + q_{\min} = 38 + 17 = 55 \rightarrow q = 55$$

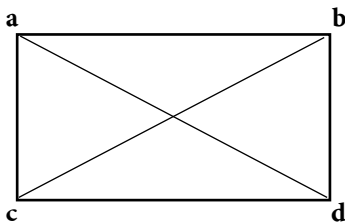
در گراف G مقدار $\text{Max} = 8$ می‌باشد. اگر p برابر ۲۱ باشد، آنگاه Min درجه راس‌ها در گراف مکمل G چقدر می‌شود؟

$$\text{Dag}(aG) + \text{Dag}(aG') = p - 1$$

$$8 + \text{Dag}(aG') = 21 - 1$$

$$\text{Dag}(aG') = 12$$

مجموعه راس‌ها و یال‌ها را بنویسید.



مجموعه یال‌ها $E : \{ (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) \}$

مجموعه راس‌ها $V : \{ a, b, c, d \}$

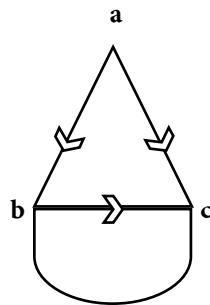
درجه راس‌ها:

$$\text{Dag } a = 3 \quad \text{Dag } c = 3$$

$$\text{Dag } b = 3 \quad \text{Dag } d = 3$$



مجموعه راس ها و يال ها را بنويسيد



مجموعه يال ها $E : \{ (ab) , (ac) , (bc) , (cb) \}$

مجموعه راس ها $V : \{ a , b , c \}$

درجه راس ها:

$Dag (a^+) = 2 \rightarrow$ خروجی

$Dag (a^-) = 1 \rightarrow$ ورودی

$Dag (b^+) = 1$

$Dag (b^-) = 2$

$Dag (c^+) = 1$

$Dag (c^-) = 2$



سوالات کلی فصل اول :

۱- در گراف ۶-منتظم میدانیم که $p+q=۱۶$ حاصل $(p-q)$ را بدست آورید.

الف : ۶

ب : ۸

ج : ۱۰

د : هیچکدام

جواب هیچکدام است.

$$P + \frac{P}{۲} = ۱۶ \rightarrow P = ۴$$

$$p - q = - ۸ \quad q = ۱۲ \quad q = ۳p$$

۲- با ۴ راس a,b,c,d چند گراف ساده میتوان رسم کرد؟

الف : ۱۶

ب : ۱۱

ج : ۶۴

د : ۱۵

جواب (ج) است.

$$P=۴$$

$$\text{يال} = q = \frac{p(p-۱)}{۲} \rightarrow q = \frac{۴(۳)}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

$$۲^۶ = ۶۴$$

۳- با ۶ راس متمایز چند گراف ساده با ۴ یال میتوان ساخت به شرطی ک ۲ یال از ۳ یال حتما ab , ac , ad باشد ؟

$$p = ۶ \rightarrow q = \frac{p(p-۱)}{۲} = \frac{۶(۵)}{۲} = ۱۵$$

$$\binom{۳}{۲} \binom{۱۲}{۲} \rightarrow ۳ \times ۶۶ = ۱۹۸$$

۴- گراف ساده G از مرتبه ۱۷ چنان چه $\text{Max} = ۷$ باشد تعداد یال های آن را به دست آورید .

$$\frac{۲q}{p} \leq \Delta \rightarrow \frac{۲q}{۱۷} \leq ۷ \rightarrow q = ۶۰$$

۵- در یک گراف منتظم تعداد یال های مساوی برابر با ۱۵ است اگر تعداد رئوس این گراف از تعداد یال های آن کمتر باشد این گراف چند راس دارد؟

الف : ۶ یا ۱۰

ب : ۸ یا ۵

ج : ۸ یا ۱۲

د : ۱۲ یا ۱۴



جواب گزینه ی اول میباشد.

$$p < q$$

$$q = \frac{rp}{2} \rightarrow 10 = \frac{rp}{2} \rightarrow rp = 20$$

۶- گراف ساده ای از مرتبه ی ۱۰ مفروض میباشد:

الف) اگر گراف همبند باشد ، حداقل چند یال دارد؟

$$\text{جواب : } P-1 = 9$$

ب) اگر گراف حتما همبند باشد ، حداقل چند یال دارد؟

$$\text{جواب : } 37 = \binom{9}{2} + 1 = \binom{P-1}{2} + 1 \text{ بعلاوه ی } 1 \text{ میکنیم چون ذکر شده حتما همبند باشد.}$$

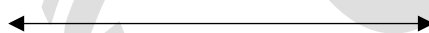
ج) اگر گراف ناهمبند باشد ، حداکثر چند یال دارد؟

$$\text{جواب : } 36 = \binom{9}{2} = \binom{P-1}{2}$$

د) اگر گراف حتما ناهمبند باشد ، حداکثر چند یال دارد؟

$$\text{جواب : } 8 = (P-1) - 1$$

$$[0 \quad 9] \quad [9 \quad 36] \quad (36 \quad 45)$$



۷- گراف ساده G از مرتبه ۱۸ که در آن $\text{Min} = 6$ است ، تعداد یال های آن را به دست آورید .

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \rightarrow 6 \leq \frac{2q}{18} \rightarrow q = 54$$

۸- در گرافی از مرتبه ی ۱۵ و $\text{Max} = 10$ و $\text{Min} = 0$ مجموع حداکثر و حداقل این گراف چند میباشد؟

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

$$\frac{2q}{15} \leq 10 \rightarrow q \leq \frac{150}{2} \rightarrow 75 \rightarrow q = 75$$

$$0 \leq \frac{2q}{15} \rightarrow q \geq \frac{0}{2} \rightarrow 0 \rightarrow 38 \rightarrow q = 38$$

$$q = q_{\max} + q_{\min} = 75 + 38 = 113 \rightarrow q = 113$$



۹- چنانچه گراف ساده از مرتبه ی ۲۰ باشد. $\text{Max}=10$ تعداد یال های آن را بدست آورید.

$$\frac{2q}{p} \leq \Delta \rightarrow \frac{2q}{20} \leq 10 \rightarrow \frac{200}{2} \rightarrow 100 \rightarrow q = 100$$

۱۰- اندازه گرافی از مرتبه ۸ چند باشد تا مطمئن باشیم این گراف یک گراف همبند است؟

- از ۸ راس یک راس را کنار میگذریم و ۷ راس می ماند در نتیجه:

$$q = \binom{7}{2} + 1 = 22$$

۱۱- اگر در یک گراف ۸ منتظم $p * q = 24$ باشد ، $p+q$ را به دست آورید.

$$q = \frac{rp}{2} \quad p * \frac{2p}{2} = 24 \quad 2p = 24 \quad p = 6 \quad 6 * q = 24 \quad q = 4 \quad p+q = 10$$